

Tutorato 8 GE220

DOCENTE: MASSIMILIANO PONTECORVO. ESERCITATORE: RAFFAELE CARBONE.

TUTORI: GIOVANNI PASSERI. BRUNO RENZI.
GIOVEDÌ 3 MAGGIO 2018.

Esercizio 1. *Uno spazio X si dice localmente compatto se ogni punto ammette un intorno la cui chiusura è compatta. Mostrare che*

1. *Se X è compatto è anche localmente compatto*
2. *Esistono spazi localmente compatti non compatti.*
3. *Se X è una varietà è localmente compatto.*

Esercizio 2. *Descrivere un'omotopia fra i lacci $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$, di punto base $x_0 \in X$, nello spazio X indicato.*

1. $X = \mathbb{R}^2$, $x_0 = (1, 0)$,

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} (1, -8t) & \text{se } t \in [0, \frac{1}{8}] \\ (1 - 8(t - \frac{1}{8}), -1) & \text{se } t \in (\frac{1}{8}, \frac{3}{8}] \\ (-1, -1 + 8(t - \frac{3}{8})) & \text{se } t \in (\frac{3}{8}, \frac{5}{8}] \\ (-1 + 8(t - \frac{5}{8}), 1) & \text{se } t \in (\frac{5}{8}, \frac{7}{8}] \\ (1, 1 - 8(t - \frac{7}{8})) & \text{se } t \in (\frac{7}{8}, 1] \end{cases}$$

$$\gamma_2(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

2. $X = \mathbb{R}^3 \setminus S^2$, $x_0 = (\frac{3}{2}, 0, 0)$, $\gamma_1(t) = \frac{3}{2}(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0)$, $\gamma_2(t) = x_0$

Esercizio 3. *Due funzioni continue $f, g : X \rightarrow Y$ si dicono omotope se esiste $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ continua t.c $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$.*

1. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ stellato di centro x_0 . Mostrare che ogni funzione $f : Z \rightarrow X$ continua, è omotopa alla funzione costante $g(z) = x_0$.*
2. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ stellato di centro x_0 . Mostrare che $\pi_1(X, x) = \{c_x\}$ per ogni $x \in X$, dove c_x è la classe di omotopia del cammino costante uguale a x .*
3. *Sia Y uno spazio topologico connesso per archi. Per ogni coppia di punti $(y, z) \in Y \times Y$ si consideri $\gamma_{y,z}(t)$, un arco continuo che li connette. Siano $f, g : X \rightarrow Y$ due funzioni continue da uno spazio topologico X . È vero $H(x, t) := \gamma_{f(x), g(x)}(t)$ definisce un'omotopia tra f e g ? (Dimostrare o confutare).*

Esercizio 4. *Dimostrare o confutare le seguenti asserzioni:*

1. *La traccia di un laccio è sempre compatta.*
2. *Lacci avente traccia omeomorfa sono omotopi.*